

Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Bat-Zin] : *De l'Analyse fonctionnelle à la Théorie spectrale*, Athanasios Batakis, Michel Zinsmeister

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Analystan*, Phillippe Caldero, Marie Peronnier

[Cia] : *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Phillippe Ciarlet

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Las] : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 1 et 2*, Patrick Lascaux

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

I Partie A [Li]

Thm 1 (Équivalence des normes) :

App 2 : Une application linéaire en dimension finie est continue.

Contre-Ex 3 : Contre-exemple en dim infinie.

II Partie B - Compacité

II.1 Compacité en dimension finie [Li]

Thm 4 (Riesz) :

App 5 : Tout compact en dimension infinie est d'intérieur vide.

Prop 6 (Compacts en dim finie) :

App 7 : Une fonction continue coercive en dimension finie possède un minimum.

II.2 Opérateurs compacts [Li] [Bat-Zin]

Déf 8 : $T : E \rightarrow F$ est un opérateur compact si $T(B_E)$ est relativement compact dans F .

Ex 9 : Les opérateurs de rang finis sont compacts.

Prop 10 : L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

App 11 : Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

Prop 12 : $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal bilatère.

App 13 : Un opérateur compact n'est pas inversible si E et F sont de dim infinie.

Thm 14 : Si $T \in \mathcal{K}(E)$:

- (1) $\ker(I - T)$ est de dim finie.
- (2) $R(I - T)$ est fermée
- (3) Si $I - T$ est injectif, alors il est inversible.

Thm 15 (Alternative de Fredholm) :

Thm 16 (Spectre d'un opérateur compact) :

Ex 17 : Spectre de l'opérateur de Volterra / Quasi-Primitive

III Partie C - Polynômes [Dem] [Dan]

Thm 18 (Weierstrass) :

Contre-Ex 19 : $\exp$ ne peut pas être approchée par des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Déf 20 (Fonction équioscillante) :

Ex 21 : Polynômes de Tchebychev.

Prop 22 : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(f, R_n[X]) = \|f - P\|$. Alors $g := fP$ équioscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

Thm 23 (Meilleure approximation uniforme) :

Thm 24 (Interpolation de Lagrange) :

IV Partie D - Approximation par des espaces de dim finie

IV.1 Espaces de Hilbert séparables [Li]

Thm 25 (Projection sur un convexe) :

Rem 26 : On peut donc l'utiliser sur un sev de dim finie.

Ex 27 (Projection sur un sev de dim finie) :

Thm 28 (Inégalité de Bessel) :

Thm 29 (Égalité de Parseval) :

IV.2 Séries de Fourier [Gou] [Amr]

Déf 30 (Espace $C_{2\pi}^0$) :

Déf 31 (Coefficients de Fourier) :

Prop 32 (Projection sur les exponentielles) :

Prop 33 (Bessel et Parseval) :

V Partie E - Calcul différentiel

V.1 Généralité et réécriture pour la dimension finie [Gou] [Amr]

Déf 34 (Différentielle) :

Ex 35 (Gradient) :

Déf 36 (Dérivée partielle) :

Prop 37 (Lien différentielle et dérivées partielles) :

Ex 38 : Voir [Amr]

Déf 39 (Différentielle seconde) :

Thm 40 (Schwarz) :

Déf 41 (Hessienne) :

V.2 Optimisation [Rou] [Amr] [Cal-Per]

Prop 42 (Point critique) :

Thm 43 (Caractérisation par la Hessienne) :

App 44 (Gradient à pas optimal) :

Thm 45 (Extrema liés) :

App 46 : Un parallélépipède d'aire minimum pour un volume donné est un cube.

Prop 47 (Inégalité de Hadamard) :

 **Dév 48 (La matrice la plus proche de chez vous) :**

VI Partie F - Analyse numérique [Sch] [Las] [Cia]

VI.1 Analyse matricielle

Déf 49 (Rayon spectral) :

Thm 50 (Rayon spectral et normes subordonnées) :

Thm 51 (Équivalence des convergences) :

Déf 52 (Conditionnement) :

Prop 53 (Inégalité de conditionnement) :

Ex 54 (Matrice du Laplacien) :

VI.2 Méthodes itératives

Déf 55 : Soit $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La méthode itérative associée à cette décomposition est $Mx_{x+1} = Nx_k + b$ pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ex 56 : La méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$ [Faire dessin pour D , E et F].

Ex 57 : La méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$.

Thm 58 : La méthode itérative $A = M - N$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $b \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Ex 59 : Exemple 2 p. 330 [Las]

Rem 60 : La convergence est alors géométrique, de facteur géométrique ρ .

 **Dév 61 (Accélération de Tchebychev) :**

Thm 62 (Convergence de Jacobi) :

Thm 63 (Convergence Relaxation) :